## Решение транспортной задачи линейного программирования. Метод наименьшей стоимости (сбалансированная задача)

**Задача:**

Стоимость доставки единицы продукции от поставщика к потребителю располагается в правом нижнем углу ячейки.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 |
| A 1 | 5 | 3 | 1 | 10 |
| A 2 | 3 | 2 | 4 | 20 |
| A 3 | 4 | 1 | 2 | 30 |
| Потребность | 15 | 20 | 25 |  |

Требуется составить план перевозок, при котором общая стоимость доставки продукции будет наименьшей.

**Решение:**

**Для решения задачи необходимо выполнение следующего условия:  
cуммарные запасы продукции у поставщиков должны равняться суммарной потребности потребителей.**  
Проверим.  
Запасы поставщиков: 10 + 20 + 30 = 60 единиц продукции.  
Потребность потребителей: 15 + 20 + 25 = 60 единиц продукции.

Суммарные запасы продукции у поставщиков равны суммарной потребности потребителей.

**Для решения задачи необходимо выполнение следующего условия:  
количество задействованных маршрутов = количество поставщиков + количество потребителей - 1.**  
Поэтому если возникнет ситуация, в которой будет необходимо исключить столбец и строку одновременно, мы исключим что-то одно.

В первую очередь, будем задействовать маршруты с наименьшей стоимостью доставки.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 |
| A 1 | 5 | 3 | 1 | 10 |
| A 2 | 3 | 2 | 4 | 20 |
| A 3 | 4 | **?**  1 | 2 | 30 |
| Потребность | 15 | 20 | 25 |  |

20 = min { 20, 30 }

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 |
| A 1 | 5 | 3 | **?**  1 | 10 |
| A 2 | 3 | 2 | 4 | 20 |
| A 3 | 4 | **20**  1 | 2 | ~~30~~   10 |
| Потребность | 15 | ~~20~~ нет | 25 |  |

10 = min { 25, 10 }

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 |
| A 1 | 5 | 3 | **10**  1 | ~~10~~   нет |
| A 2 | 3 | 2 | 4 | 20 |
| A 3 | 4 | **20**  1 | **?**  2 | ~~30~~   10 |
| Потребность | 15 | ~~20~~ нет | ~~25~~ 15 |  |

10 = min { 15, 10 }

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 |
| A 1 | 5 | 3 | **10**  1 | ~~10~~   нет |
| A 2 | **?**  3 | 2 | 4 | 20 |
| A 3 | 4 | **20**  1 | **10**  2 | ~~30~~   ~~10~~   нет |
| Потребность | 15 | ~~20~~ нет | ~~25~~ ~~15~~ 5 |  |

15 = min { 15, 20 }

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 |
| A 1 | 5 | 3 | **10**  1 | ~~10~~   нет |
| A 2 | **15**  3 | 2 | **?**  4 | ~~20~~   5 |
| A 3 | 4 | **20**  1 | **10**  2 | ~~30~~   ~~10~~   нет |
| Потребность | ~~15~~ нет | ~~20~~ нет | ~~25~~ ~~15~~ 5 |  |

5 = min { 5, 5 }

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 |
| A 1 | 5 | 3 | **10**  1 | ~~10~~   нет |
| A 2 | **15**  3 | 2 | **5**  4 | ~~20~~   ~~5~~   нет |
| A 3 | 4 | **20**  1 | **10**  2 | ~~30~~   ~~10~~   нет |
| Потребность | ~~15~~ нет | ~~20~~ нет | ~~25~~ ~~15~~ ~~5~~ нет |  |

Стоимость доставки продукции, для начального решения, не сложно посчитать.

10\*1 + 15\*3 + 5\*4 + 20\*1 + 10\*2 = 115 ден. ед.

Полученное решение является оптимальным?

Проверим.

Каждому поставщику A i ставим в соответствие некоторое число U i , называемое потенциалом поставщика.  
Каждому потребителю B j ставим в соответствие некоторое число V j , называемое потенциалом потребителя.

**Для задействованного маршрута:  
потенциал поставщика + потенциал потребителя = тариф задействованного маршрута.**  
Последовательно найдем значения потенциалов.  
Значение одного потенциала необходимо задать. Пусть u2 = 0.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | | A2B1 : | v1 + u2 = 3 | v1 = 3 - 0 = 3 | | A2B3 : | v3 + u2 = 4 | v3 = 4 - 0 = 4 | | A3B3 : | v3 + u3 = 2 | u3 = 2 - 4 = -2 | | A1B3 : | v3 + u1 = 1 | u1 = 1 - 4 = -3 | | A3B2 : | v2 + u3 = 1 | v2 = 1 - (-2) = 3 |   [Подробнее о нахождении потенциалов](http://reshmat.ru/potential.html?sizeA=3&sizeB=3&plan11=-1&plan12=-1&plan13=10&plan21=15&plan22=-1&plan23=5&plan31=-1&plan32=20&plan33=10&c11=5&c12=3&c13=1&c21=3&c22=2&c23=4&c31=4&c32=1&c33=2) | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Поставщик | Потребитель | | | U | | B 1 | B 2 | B 3 | | A 1 | 5 | 3 | **10**  1 | u1 = -3 | | A 2 | **15**  3 | 2 | **5**  4 | u2 = 0 | | A 3 | 4 | **20**  1 | **10**  2 | u3 = -2 | | V | v1 = 3 | v2 = 3 | v3 = 4 |  | |
| Найдем оценки незадействованных маршрутов (cij - стоимость доставки). ?   |  |  | | --- | --- | | A1B1 : | Δ11 = c11 - ( u1 + v1 ) = 5 - ( -3 + 3 ) = 5 | | A1B2 : | Δ12 = c12 - ( u1 + v2 ) = 3 - ( -3 + 3 ) = 3 | | A2B2 : | Δ22 = c22 - ( u2 + v2 ) = 2 - ( 0 + 3 ) = -1 | | A3B1 : | Δ31 = c31 - ( u3 + v1 ) = 4 - ( -2 + 3 ) = 3 | | |

Есть отрицательная оценка. Следовательно, возможно получить новое решение, как минимум, не хуже имеющегося.

**ШАГ №1.**

Выберем ячейку A2B2, ее оценка отрицательная. Пожалуйста, поставьте курсор мыши в выбранную ячейку A2B2  
**Используя только горизонтальные и вертикальные перемещения курсора**, соедините непрерывной линией заполненные ячейки так, чтобы вернуться в исходную ячейку A2B2  
Ячейки, расположенные в вершинах построенной ломаной линии, образуют цикл для выбранной ячейки  
(см. выделенные ячейки в таблице ниже). Он единственный. Направление обхода не имеет значения.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 |
| A 1 | 5 | 3 | **10**  1 | 10 |
| A 2 | **15**  3 | -1  2 | **5**  4 | 20 |
| A 3 | 4 | **20**  1 | **10**  2 | 30 |
| Потребность | 15 | 20 | 25 |  |

5 = min { 5, 20 } ?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 |
| A 1 | 5 | 3 | **10**  1 | 10 |
| A 2 | **15**  3 | -1  2 | **5**  4 | 20 |
| A 3 | 4 | **20**  1 | **10**  2 | 30 |
| Потребность | 15 | 20 | 25 |  |

Данное преобразование не изменит баланса.  
А вот общая стоимость доставки продукции изменится на величину:  
2 \* 5 - 4 \* 5 + 2 \* 5 - 1 \* 5 = ( 2 - 4 + 2 - 1 ) \* 5 = -1 \* 5 ден. ед.  
**Вы правильно заметили, что -1 \* 5 = Δ22 \* 5** ?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 |
| A 1 | 5 | 3 | **10**  1 | 10 |
| A 2 | **15**  3 | **+5**  -1  2 | **5 - 5**  4 | 20 |
| A 3 | 4 | **20 - 5**  1 | **10 + 5**  2 | 30 |
| Потребность | 15 | 20 | 25 |  |

Получили новое решение. ?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 |
| A 1 | 5 | 3 | **10**  1 | 10 |
| A 2 | **15**  3 | **5**  2 | 4 | 20 |
| A 3 | 4 | **15**  1 | **15**  2 | 30 |
| Потребность | 15 | 20 | 25 |  |

Общую сумму доставки продукции, для данного решения, легко посчитать.

S = 115 + Δ22 \* 5 = 115 -1 \* 5 = 110 ден. ед.

Полученное решение является оптимальным?

Проверим.

Каждому поставщику A i ставим в соответствие некоторое число U i , называемое потенциалом поставщика.  
Каждому потребителю B j ставим в соответствие некоторое число V j , называемое потенциалом потребителя.

**Для задействованного маршрута:  
потенциал поставщика + потенциал потребителя = тариф задействованного маршрута.**  
Последовательно найдем значения потенциалов.  
Значение одного потенциала необходимо задать. Пусть u2 = 0.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | | A2B1 : | v1 + u2 = 3 | v1 = 3 - 0 = 3 | | A2B2 : | v2 + u2 = 2 | v2 = 2 - 0 = 2 | | A3B2 : | v2 + u3 = 1 | u3 = 1 - 2 = -1 | | A3B3 : | v3 + u3 = 2 | v3 = 2 - (-1) = 3 | | A1B3 : | v3 + u1 = 1 | u1 = 1 - 3 = -2 |   [Подробнее о нахождении потенциалов](http://reshmat.ru/potential.html?sizeA=3&sizeB=3&plan11=-1&plan12=-1&plan13=10&plan21=15&plan22=5&plan23=-1&plan31=-1&plan32=15&plan33=15&c11=5&c12=3&c13=1&c21=3&c22=2&c23=4&c31=4&c32=1&c33=2) | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Поставщик | Потребитель | | | U | | B 1 | B 2 | B 3 | | A 1 | 5 | 3 | **10**  1 | u1 = -2 | | A 2 | **15**  3 | **5**  2 | 4 | u2 = 0 | | A 3 | 4 | **15**  1 | **15**  2 | u3 = -1 | | V | v1 = 3 | v2 = 2 | v3 = 3 |  | |
| Найдем оценки незадействованных маршрутов (cij - стоимость доставки). ?   |  |  | | --- | --- | | A1B1 : | Δ11 = c11 - ( u1 + v1 ) = 5 - ( -2 + 3 ) = 4 | | A1B2 : | Δ12 = c12 - ( u1 + v2 ) = 3 - ( -2 + 2 ) = 3 | | A2B3 : | Δ23 = c23 - ( u2 + v3 ) = 4 - ( 0 + 3 ) = 1 | | A3B1 : | Δ31 = c31 - ( u3 + v1 ) = 4 - ( -1 + 3 ) = 2 | | |

Нет отрицательных оценок. Следовательно, уменьшить общую стоимость доставки продукции невозможно.

**Ответ:**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X опт = | Знак матрицы | 0 | 0 | 10 | Знак матрицы |  |
| 15 | 5 | 0 |
| 0 | 15 | 15 |

Smin = 110 ден. ед.